შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

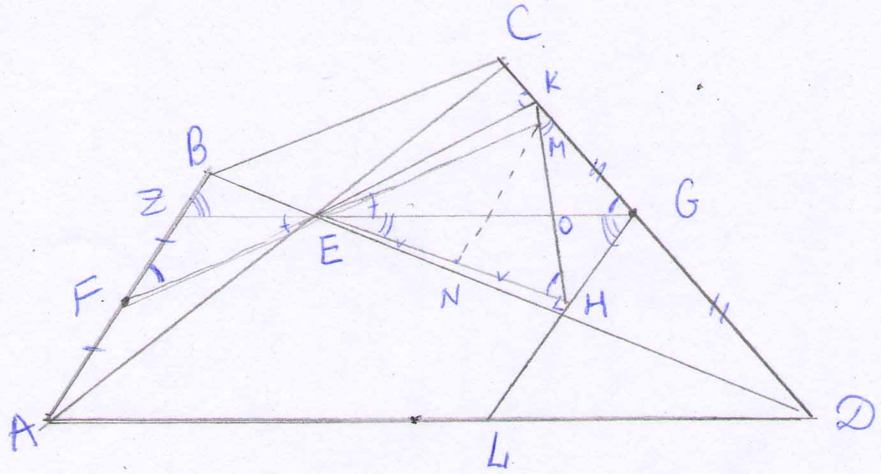
მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 009

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

I



$ABCD$ ჩახაზული წრეწირში $\Rightarrow \angle ABD = \angle ACD = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$, $\angle BAC = \angle BDC = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle DCE$ $\quad AF = BF$, $CG = DG$ $\Rightarrow$ FE და EG მედიანა

შესაბამისად $\Rightarrow \triangle FBE \sim \triangle GCE \Rightarrow \angle BFE = \angle CGE = \alpha$

რადგან $\angle FBE = \angle ECG$ და $\frac{FB}{CG} = \frac{BE}{CE}$

$\angle EKG = 90^\circ$, $\angle EHG = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $EKGH$ - ოთხკუთხედი წრეწირში $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EHK = \angle EGK = \frac{\overset{\frown}{EK}}{2}$

$\angle EGK$ იგივეა, რაც $\angle CGE$ $\Rightarrow \angle EHK = \angle EGK = \alpha$

$\angle HEG = \angle HKG = \frac{\overset{\frown}{HG}}{2} = \beta$ $\angle EOM$ გარე კუთხეა ΔOKG-ისთვის

ე.ი $\angle EOM = \angle OKG + \angle OGK = \beta + \alpha$

$LG \parallel AB \Rightarrow \angle BZE = \angle EGL$ (შიგა ჯვარედინა კუთხეებია)

$\angle EGL$ იგივეა, რაც $\angle EGH$ $\angle EGH = 90^\circ - \angle HEG = 90^\circ - \beta$

ე.ი $\angle BZE = 90^\circ - \beta$ $\angle BZE$ გარე კუთხეა ΔFZE-სთვის $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BZE = \angle ZFE + \angle FEZ \Rightarrow \angle FEZ = \angle BZE - \angle ZFE =$

$= \angle BZE - \angle BFE = 90^\circ - \beta - \alpha$

$\angle FEZ = \angle MEO$ (ვერტიკალური კუთხეები)

განვიხილოთ კუთხეთა ჯამი ΔEMO-ში $\left.\begin{array}{l} \angle MEO = 90^\circ - \beta - \alpha \\ \angle EOM = \beta + \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MEO + \angle EOM = 90^\circ \Rightarrow \angle EMO = 90^\circ$ ე.ი ΔEMH-

მართკუთხაა $EN = NH \Rightarrow MN$- მედიანაა ΔEMH-ში, რომელიც

მართკუთხაა ე.ი $MN = \frac{EH}{2} \Rightarrow EH = 2MN$

5

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 009

ამოცანა № 2

გვერდი № 3

ვთ. ეს რიცხვები არის $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2012}$,

ალგორითმი ვინ არის და ვინ არის „მეგობრები" ჩავწერ.

მიმდევრობით ოთხ რიცხვიან ჯგუფს.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ და ა.შ.

ვთ. $(a_1; a_2)$, $(a_5; a_6)$, $(a_9; a_{10})$ - და ა.შ. არის მეგობრები

შესაბამისად $(a_3; a_4)$, $(a_7; a_8)$ $(a_{11}; a_{12})$ და ა.შ. არ არის

მეგობრები. განვიხილოთ ეს ოთხი მიმდევრობა.

a_2, a_3, a_4, a_5 - ში ამოწმებთ, როცა a_2 a_5-ის მეგობარი

იყოს, შესაბამისად a_6 a_9-ის და ა.შ. მაშინ a_4 a_7-ის

მეგობარი ვერ იქნება. a_1-ს შეუძლია იყოს, a_5-ის ნებისმი-

ერი ყველას მეგობარი. ე.ი. 2012 რიცხვის ჯგუფს

შევძლებთ გავყოთ ისე, რომ ოთხეულის წყვილი 1341-ზე-

ნაკლები მეგობარი a_3 a_4-ის მეგობარი არის მაშინ ის შეიძლება

იყოს a_2-ს მეგობარი, ასევე a_4-ის და a_4 a_5 მეგობარი და

a_6-ს მაშინ a_4 a_7-ის მეგობარი ვერ იქნება. სამართალი,

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 009

ამოცანა № 2

გვერდი № 4

[illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] 2012 [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]-
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 1341 [illegible]
[illegible].

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	21.04.2012/ მათ/ I/ 009

ამოცანა № 3 გვერდი № 5

$a-b=a^n c-b^n d$ $n>0$ $n\in\mathbb{Z}$ $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ $|c-d|=1$

ვთ. $d<c \Rightarrow d=c+1$ ე.ი. $a-b=a^n c-b^n(c+1)=a^n c-b^n c-b^n$

$b^n=c(a^n-b^n)-(a-b)=c(a-b)(a^{n-1}+b^{n-2}b^1+\dots+b^{n-1})-(a-b)=$

$=(a-b)(c(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+\dots b^{n-1})-1)$ 1) თუ $c=1$ და $d=0$

მაშინ $a-b=b^n$ ე.ი. $\sqrt[n]{|a-b|}=\sqrt[n]{b^n}=|b|$ $b\in\mathbb{Z}$ ე.ი.

მთელი რიცხვია. 2) ზოგადი შემთხვევა შესაძლოა თუ

$a-b=k^n$ და $c(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+\dots b^{n-1})-1=m^n$ სადაც $k,m\in\mathbb{Z}$

რადგან $b=km$ მაშინ $\sqrt[n]{|a-b|^n}=\sqrt[n]{k^n}=|k|$

$k\in\mathbb{Z}$ და ის მთელი რიცხვია.

საბოლოოდ, თუ $|c-d|=1$ შესაძლო შემთხვევაში ისეთი a,b და

c,d მთელი რიცხვები და n, რომ $\sqrt[n]{|a-b|}$ იქნება

მთელი რიცხვი არის ისეთი $(a-b)$ და მამრავლი ნაწილი

მაშინ, ამ ისეთში $(a^n c-b^n d)$ არის ამ $c=1$ და $d=0$

უმარტივესი შემთხვევა a და b ისეთი რომ $\sqrt[n]{|a-b|}$ იქნება

მთელი არის ამ $d=1$ და $c=0$ მაშინ უმარტივესი შემთხვევა